۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته (تبدیل جمع به ضرب):

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\frac{A\pm B}{2}\cos\frac{A\pm B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{\cos 5x - \cos x}{\sin x + \sin 5x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{-2\sin 3x\ \sin 2x}{2\sin 3x\ \cos 2x} = \sqrt{3} \xrightarrow{\sin 3x \neq 0} tg\,2x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$$

با توجه به این‌که $\sin 3x \neq 0$، فقط $x = -\frac{\pi}{6}$ قابل قبول است. پس معادله ی داده شده در بازهی $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ دارای ۱ جواب است.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 4\sin x\cos x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$$

پس خواهیم داشت: $2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{3}$ یا $2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{3}$

در نتیجه: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}$

در بازه $[0, 2\pi]$ خواهیم داشت: $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}$ که مجموع آن‌ها $\frac{27\pi}{9} = 3\pi$ می‌شود.

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x \Rightarrow \sin 4x = \underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}_{1}\underbrace{\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)}_{-\cos 2x}$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\ \cos x = -\cos 2x \Rightarrow 2\sin 2x\ \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب ها $= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به ازای $3\theta = k\pi\ (k \in Z)$ مقدار $\sin 3\theta$ برابر صفر می‌شود. پس:

$$3\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{3}$$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow k = 0, 1, 2, \ldots, 7$ تعداد نقاط تلاقی برابر ۸ می‌باشد.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طرف اول تساوی یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\sin x$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow 1 - \sin x = \sin x$$

پس $\sin x = \frac{1}{2}$ و جواب کلی به‌صورت $2K\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$ می‌باشد.

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x \Rightarrow$$

$$3x = k\pi - \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 4} x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{\pm 1}{2}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در معادله‌ی $2x^2 - 5x + 1 = 0$ بنا به فرض داریم:

$$tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2}$$

بنا بر دستور مثلثاتی:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow tg(\alpha + \beta) = 5$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{عبارت مورد نظر} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^4\theta}}{\cos^2\theta - \cos^4\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta\left(\cos^2\theta\left(1 - \cos^2\theta\right)\right)} = \frac{1}{\sin^4\theta \cdot \cos^4\theta}$$

$$= \frac{16}{\sin^4 2\theta} = 16\sin^{-4} 2\theta$$

۱۱- با بسته شدن کلید، جریان اولیه‌ای در مدار تولید می‌شود که صَرف باردار کردن خازن می‌شود. ابتدا خازن بدون بار است و طبق رابطهٔ $V = \frac{q}{C}$ پتانسیل آن برابر با صفر است. با برقرار شدن جریان، بار، روی صفحات خازن می‌نشیند و به تدریج بر پتانسیل آن افزوده می‌شود. بنابراین نمودار ۲ ، نمودار اختلاف پتانسیل دو سر خازن است. با گذشت زمان، جریان عبوری از مدار کاهش می‌یابد تا خازن بطور کامل باردار شود و در نهایت، جریان مدار به صفر می‌رسد. پس نمودار ۱، نمودار جریان در مدار است. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

تذکر: توجه داشته باشید که بحث فوق زمانی معتبر است که مدار دارای مقاومت الکتریکی باشد (مثلاً منبع یا سیمها دارای مقاومت الکتریکی باشند). اگر مقاومت الکتریکی مدار صفر باشد، شارژ شدن خازن بطور آنی انجام می‌شود.

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$q_2 = q_3 \Rightarrow C_2V_2 = C_3V_3 \Rightarrow 3V_2 = 2V_3 \Rightarrow V_3 = \frac{3}{2}V_1$$

$$V_{2,2,3} = V_2 + V_3 = \frac{5}{2}V_2 \xrightarrow{5V_2 = V_1} \frac{1}{2}V_2$$

$$C_1V_1 = C_{2,2,3}V_{2,2,3} \Rightarrow 10V_1 = C_{2,2,3} \times \frac{1}{2}V_1 \Rightarrow C_{2,3,4} = 20\mu F$$

$$(\text{سری } 30)\ \text{موازی}\ C_4 = 20\mu F \Rightarrow 12\ \text{موازی}\ C_4 = 20 \Rightarrow C_4 = 8\mu F$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$q = C.V \Rightarrow q = 500C \Rightarrow q = 500\left(\varepsilon_0 \frac{A}{d}\right)$$

$$\Rightarrow q = \frac{500\varepsilon_0}{d}(A)$$

$$\text{چگالی سطحی} = \frac{q}{A} = \frac{500\varepsilon_0}{d} \Rightarrow 22 \times 10^{-7} = \frac{500 \times 8.8 \times 10^{-12}}{d}$$

$$\Rightarrow d = \frac{500 \times 8.8 \times 10^{-12}}{22 \times 10^{-7}} = 0.002m = 2mm$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. وقتی کلید باز است، اختلاف پتانسیل دو سر مدار (V) بین خازن C_1 و معادل خازن‌های C_2 و C_3 و C_4 به نسبت عکس ظرفیت تقسیم می‌شود. وقتی کلید بسته می‌شود، خازن C_3 از مدار حذف می‌شود و ولتاژ V بین خازن C_1 و معادل C_2 و C_4 به نسبت عکس ظرفیت تقسیم می‌شود. (در خازن‌های سری ولتاژ کل بین دو خازن به نسبت عکس ظرفیت تقسیم می‌شود.)

$$\text{کلید باز}: C_{2,3} = \frac{2C \times 2C}{2C + 2C} = C,\quad C' = C + C = 2C \Rightarrow V = V_1 + V',\quad q_1 = q' \Rightarrow$$

$$CV_1 = 2CV' \Rightarrow V_1 = \frac{3V}{4} \Rightarrow U'_1 = \frac{1}{2}C \times \left(\frac{3V}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{U'_1}{U_1} = \left(\frac{\frac{3}{4}V}{\frac{2}{3}V}\right)^2 = \frac{81}{64}$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر نیروی محرکه‌ی باتری را ε فرض کنیم بار اولیه‌ی خازن‌ها را به‌صورت زیر می‌توان حساب کرد:

$$q_1 = V_1C_1 = \frac{6}{10}\varepsilon C_1 = \frac{3}{5}\varepsilon \times 4 = 2/4\varepsilon$$

$$q_2 = V_2C_2 = \frac{4}{10}\varepsilon C_2 = \frac{2}{5}\varepsilon \times 6 = 2/4\varepsilon$$

بعد از اتصال صفحه‌های هم‌نام خازن‌ها به هم، ولتاژ دو سر مجموعه برابر خواهد شد با:

$$V = \frac{q_1 + q_2}{C_{eq}} = \frac{4/8\varepsilon}{10} = 0/48\varepsilon \Rightarrow q'_2 = C_2V = 6 \times 0/48\varepsilon$$

$$\frac{U'_2}{U_2} = \left(\frac{q'_2}{q_2}\right)^2 = \frac{36}{25}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$u = \frac{1}{2}C_TV^2$$

$$100 = \frac{1}{2} \times C_T \times 100 \Rightarrow C_T = 2\mu F$$

ظرفیت معادل خازن‌های ۸ و ۴ میکروفارادی چون موازی‌اند بر ابر $(8 + 4)\mu F = 12\mu F$ است.

حاصل این دو خازن با خازن‌های دیگر متوالی است. $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_1 = 4\mu F$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$q_2 = q_1 + \frac{1}{5}q_1 = \frac{6}{5}q_1$$

$$\Delta U = \frac{1}{2C}\left(q_2^2 - q_1^2\right) \longrightarrow 16 = \frac{1}{2 \times 22}\left(\frac{36}{25}q_1^2 - q_1^2\right) \longrightarrow q_1 = 40\mu C$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خازن‌های سری، بار یکسان دارند و خازن‌های موازی، ولتاژ یکسان دارند.

$$q_{1234} = q_5 \Rightarrow C_{1234}V_{1234} = C_5V_5 \Rightarrow C_5V_1 = 7V_{1234}$$

$$V_{1234} = V_4 = V_{123} \quad \text{و} \quad V_1 = V_{12}$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{q_1}{8} = \frac{q_2}{4} \Rightarrow q_1 = 2q_2 \qquad C_{12} = 12\mu F = \frac{q_{12}}{V_1}$$

$$q_3 = q_{12} \Rightarrow 12V_1 = 4V_3 \Rightarrow 3V_1 = V_3 \Rightarrow V_{123} = V_{12} + V_3 = V_1 + V_3 = 4V_1$$

$$C_5V_1 = 7 \times 4V_1 \Rightarrow C_5 = 28\ \mu F \Rightarrow C_{1234} = 7\mu F$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{28} + \frac{1}{7} \Rightarrow C_T = \frac{28}{5} = 4/6\ \mu F$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ظرفیت معادل دو خازن موازی هم برابر $4 + 2 = 6\mu F$ است. بنابراین ظرفیت معادل کل مدار برابر با $C = \frac{6 \times 5}{6 + 5} = \frac{30}{11}\mu F$ است. بار الکتریکی کل نیز با همان $600\mu C$ است. پس:

$$V = \frac{q}{c} = \frac{600}{\frac{30}{11}} = 220\ \text{ولت}$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$q_3 = C_3V_3 \Rightarrow 48 = 6V_3 \Rightarrow V_3 = 8\ (V)$$

$$C_3\ \text{سری}\ C_4 \Rightarrow q_3 = q_4 = 48\ \mu C \rightarrow q_4 = C_4V_4 \Rightarrow 48 = 12V_4 \Rightarrow V_4 = 4\ (V)$$

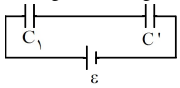
$$V_{3,4} = V_3 + V_4 = 12\ (V) \rightarrow C_{3,4} = \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\ \mu F$$

$$C_2 \| C_{3,4} \Rightarrow C' = C_2 + C_{3,4} = 6 + 4 = 10\ \mu F \rightarrow C_2 \| C_{3,4} \Rightarrow V_2 = V_{3,4} = 12\ (V)$$

دو سر همگی به نقاط یکسانی اتصال دارند.

$$V' = V_2 = V_{3,4} = 12\ (V)$$

$$q' = C'V' = 10 \times 12 = 120\ \mu F$$

$$C_1\ \text{سری}\ C' \Rightarrow q_1 = q' = 120\ \mu F$$

$$q_1 = C_1V_1 \Rightarrow 120 = 8V1 \Rightarrow V_1 = 15\ (V)$$